האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תשנ"ה – מועד א'

המורה: פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. הגדר מהו הטווח של הופעה של אופרטור בביטוי נוצר.
ב. יהי ϕ ביטוי נוצר באלגברת יצירה $\mathcal{E}$ של ביטויים, יהי χ קטע של ϕ שגם הוא ביטוי נוצר, ויהי F אופרטור המופיע ב-χ. הוכח כי הטווח של F ב-ϕ נמצא כולו ב-χ.

2. א. יהיו c ו-c' קשרים פסוקיים. הגדר מתי אנו אומרים ש-c' דואלי ל-c.
ב. יהיו ϕ ו-ϕ' פסוקים של תחשיב הפסוקים. הגדר מתי אנו אומרים ש-ϕ' דואלי ל-ϕ.
ג. תן הוכחה מלאה לכך שאם פסוק ϕ הוא טאוטולוגיה אז כל פסוק ϕ' דואלי לו הוא סתירה.

3. א. הוכח כי קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בתחשיב היחסים מסדר שני אינה כריעה חיובית.
ב. מה אומרת לנו העובדה ב-א'?

4. כתוב הוכחה במערכת ההיסק של עץ השקר $(\mathfrak{D}_3)$ לפסוק

$$\forall \mathsf{x}(\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \psi)$$

היכן ש-x אינו מופיע ב-ψ.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ה – מועד ב'

המורה: פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. הוכח את המשפט הבא: לכל קבוצה W אנו מסמנים ב- $\mathfrak{F}_W$ את אלגברת הפעולות על W. תהי C קבוצה של קשרים פסוקיים ו-D קבוצת לוחות האמת שלהם. כל פונקציה הנוצרת מ-C ב- $\mathfrak{F}_\Pi$, כאשר Π היא קבוצת כל הפסוקים, גם היא קשר פסוקי, ולוח האמת שלה נוצר מ-D ב- $\mathfrak{F}_{\{\mathsf{T},\mathsf{F}\}}$.

2. יהי $\mathcal{D}$ עץ האמת של פסוק ϕ בתחשיב היחסים. נתון שבכל העלים של $\mathcal{D}$ נמצאות סדרות רעות, כלומר סדרות המכיליות פסוק ושלילתו.
א. מה הנך יודע על ϕ? הוכח!
ב. נסח והוכח את המשפט העיקרי המאפשר לך לענות על א'.

3. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים.

4. כתוב בשפה המלאה של תחשיב היחסים את הטענות הבאות, כאשר הנך משתמש בכל פעם בפסוק בודד.
א. השדה הוא בעל המציין 0.
ב. בגרף x ו-y הם צמתים שאין מסילה המחברת אותם, כלומר לא קיימת סדרת צמתים $x_1, \ldots, x_n$ כך ש- x_1 הוא x, x_n הוא y, ולכל $1 \le i < n$ הצומת x_i מחובר לצומת x_{i+1} באמצעות צלע של הגרף.
ג. אקסיומת החסם העליון של המספרים הממשיים.
ד. x שווה ל-y, ללא שימוש בסימן השוויון $\approx$.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ה – מועד ג'

המורה: פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. הגדר את מושג הטאוטולוגיה בתחשיב היחסים.
ב. הוכח שכל טאוטולוגיה של תחשיב היחסים היא אמיתית לוגית.
ג. הוכח את המשפט העיקרי עלו אתה מסתמך בהוכחת ב' (משפט זה אינו עוסק רק בטאוטולוגיות).

2. א. הגדר מתי שם עצם t כשר להצבה עבור משתנה x בנוסחה ϕ.
ב. הוכח שאם t כשר להצבה עבור x בנוסחה ϕ אז הנוסחה $\forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \phi(t)$ אמיתית לוגית, היכן ש-$\phi(\mathsf{x})$ היא ϕ, ו- $\phi(t)$ היא הנוסחה המתקבלת מ-$\phi(\mathsf{x})$ ע"י הצבת t להופעות החופשיות של x.
אין צורך להוכיח כאן את המשפט הכללי עליו אתה מסתמך, אלא רק לצטט אותו באופן מלא.
ג. הבא דוגמאות של נוסחאות ϕ ו-ψ בהן t אינו כשר להצבה עבור x ב-ϕ וב-ψ, הנוסחה $\forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \phi(t)$ אמיתית לוגית והנוסחה $\forall\mathsf{x}\psi(\mathsf{x}) \to \psi(t)$ אינה אמיתית לוגית.

3. יהי $\mathcal{A}$ מבנה ו-E יחס דו-מקומי על $\mathcal{A}$.
א. הגדר מתי E נקרא יחס חפיפה על $\mathcal{A}$.
ב. עבור יחס חפיפה E על $\mathcal{A}$ הגדר את מבנה המנה $\mathcal{A}/E$.
ג. צטט במלואו את המשפט הקושר את הערכים של נוסחאות של תחשיב היחסים מסדר ראשון ללא שיוויון ב-$\mathcal{A}$ וב- $\mathcal{A}/E$.
ד. הוכח את צעד האינדוקציה בהוכחת המשפט של ג' למקרה של הנוסחה $\exists\mathsf{x}\phi$.

4. א. הגדר, עבור מערכת היסק לתחשיב הפסוקים, את המושגים של שלמות ושלמות במובן החלש.
ב. הבא דוגמא למערכת היסק לתחשיב הפסוקים שהיא שלמה במובן החלש ואינה שלמה. הקפד להוכיח את השלמות במובן החלש ואת אי השלמות של המערכת.
ג. הבא דוגמא למערכת היסק שלמה. הקפד להוכיח את שלמותה.

בהצלחה!